Título: CONEXIONES GLOBALES Y COMPORTAMIENTOS PERIÓDICOS EN SISTEMAS DINÁMICOS LINEALES A TROZOS

Nombre: García Medina, Elisabeth

Universidad: Universidad de Sevilla

Departamento: Matemática aplicada II

Fecha de lectura: 22/06/2011

Programa de doctorado: Matemáticas

Dirección:

- **Director:** FERNANDO FERNÁNDEZ SANCHEZ
- **Director:** VICTORIANO CARMONA CENTENO

Tribunal:

- **presidente:** Emilio Freire Macías
- **secretario:** ANTONIO ESTEBAN TERUEL AGUILAR
- **vocal:** Antonio Algaba Durán
- **vocal:** FRANCISCO TORRES PERAL
- **vocal:** Santiago F. Ibáñez Mesa

Descriptores:

- ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

El fichero de tesis ya ha sido incorporado al sistema

- 2011garciconex.pdf

Localización: EL SERVICIO DE DOCTORADO, UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Resumen: El objetivo primordial que nos planteamos en la memoria es utilizar las particularidades de los sistemas lineales a trozos para obtener pruebas analíticas de la existencia de órbitas periódicas y conexiones globales en tres dimensiones.

La falta de diferenciabilidad del sistema impide, en un principio, la aplicación de las técnicas generales de la dinámica diferenciable, y por tanto, los sistemas lineales a trozos requieren el uso de técnicas específicas que permitan describir su comportamiento dinámico.

Comenzamos la memoria haciendo un repaso por alguno de los conceptos fundamentales relativos a sistemas tridimensionales continuos lineales a trozos con dos zonas de linealidad. En primer lugar, determinamos la existencia y unicidad global de solución para el problema de valor inicial asociado. Después, nos planteamos cómo escribir el sistema en algún tipo de forma canónica y distinguimos cuándo el sistema puede o no

desacoplarse basándonos en las condiciones de controlabilidad y observabilidad. Para terminar, nos centramos en cómo se construyen las semiaplicaciones de Poincaré y en la manera de calcular, a partir de ellas, los multiplicadores característicos asociados a una órbita periódica. La correcta manipulación de las semiaplicaciones de Poincaré nos permitirá llegar, en capítulos posteriores, a ecuaciones e inecuaciones que caractericen a las distintas órbitas periódicas y conexiones globales que queremos estudiar.

Aunque gran parte del trabajo realizado en la memoria se puede extender de forma genérica a otros sistemas, en el segundo capítulo nos centramos en una familia uniparamétrica particular de sistemas tridimensionales continuos lineales a trozos que además poseen reversibilidad al cambio de signo en dos variables espaciales, divergencia nula y no se pueden desacoplar. Entre todos los miembros de la familia, elegimos un representante que podemos considerar como una versión lineal a trozos del conocido sistema de Michelson, ya que se puede obtener de éste tras unas simples manipulaciones. El resto del capítulo se dedica a analizar las propiedades geométricas principales del flujo del sistema, de donde destacamos, por su uso en posteriores resultados, el estudio del sentido del flujo en el plano de separación y la obtención local de las variedades invariantes de los equilibrios. Finalizamos con las expresiones de la solución de los sistemas lineales en cada zona.

En cuanto contamos con la mayoría de elementos teóricos necesarios para abordar los problemas propuestos, nos embarcamos en la prueba de la existencia de dos conexiones globales para ciertos valores del parámetro del sistema. Más concretamente, consideramos sólo conexiones directas, es decir, órbitas homoclinas que sólo intersecan dos veces al plano de separación y ciclos heteroclinos tipo punto-T que intersecan en cuatro puntos. Mediante las semiaplicaciones de Poincaré, obtenemos unas condiciones (escritas como un conjunto de ecuaciones e inecuaciones) que caracterizan a cada uno de los dos objetos y comprobamos que, a pesar de ser distintos, las dos pruebas de existencia son análogas: ambas tienen una parte común, donde nos planteamos la existencia de solución de un sistema genérico de ecuaciones cuya forma engloba a los casos anteriores, así como unos detalles específicos de cada tipo de conexión, que abordamos en dos secciones consecutivas del capítulo. Como final del capítulo mostramos que, para ciertos valores del parámetro, aparecen dos tipos distintos de conexiones homoclinas directas así como otros dos tipos de ciclos heteroclinos tipo punto-T.

El capítulo cuarto se dedica al análisis de comportamientos periódicos y nos centramos fundamentalmente en el estudio de la configuración conocida como bifurcación noose (lazo), cuya aparición ya es conocida en el sistema de Michelson diferenciable. Esta estructura del diagrama de bifurcaciones relaciona las dos bifurcaciones más básicas de órbitas periódicas (silla-nodo y duplicación de periodo) de tal modo que la familia sufre, para un valor del parámetro, una bifurcación de duplicación de periodo y, posteriormente, ambas órbitas (la original y la de periodo doble) desaparecen al colisionar en una bifurcación silla-nodo. En el proceso que sigue la órbita de periodo doble antes de llegar al pliegue podemos comprobar como una de las dos vueltas originales va disminuyendo progresivamente su tamaño hasta desaparecer, a medida que decrece el periodo. Este hecho, que en el sistema de Michelson diferenciable no tiene casi ninguna relevancia en el estudio, es fundamental en la versión lineal a trozos, ya que involucra una tangencia transversal (cúbica) de la órbita periódica con el plano de separación y esto fuerza a distinguir entre órbitas que intersecan dos veces con el plano de separación y órbitas que lo hacen cuatro veces. La implicación de este fenómeno en nuestro análisis es fundamental por dos motivos: por un lado, porque obliga a manejar distintas ecuaciones para cada tipo de órbita y, por el otro, porque el punto de tangencia tiene algunas características y propiedades que lo hacen tener un papel central en los diagramas de bifurcación de las familias de órbitas periódicas.

Cabe destacar que, en el capítulo cuarto, llevamos a cabo una prueba analítica de existencia de la familia de órbitas periódicas reversibles y de dos cortes con el plano de separación que está involucrada en la bifurcación lazo. Esta familia no se puede considerar como local (en el sentido de que se debe a una degeneración de equilibrios y, por tanto, sólo se puede estar seguro de su existencia en un entorno de la misma), sino que existe en todo un intervalo de valores del parámetro y termina en la tangencia transversal antes mencionada. Las técnicas utilizadas se basan en las ecuaciones e inecuaciones obtenidas a partir de las semiaplicaciones de Poincaré. Para terminar el capítulo usamos métodos numéricos para continuar la familia de órbitas periódicas reversibles de cuatro cortes que surge de la tangencia así como para detectar y caracterizar las bifurcaciones principales que aparecen.

El algoritmo de continuación numérica desarrollado (basado en la pseudo-longitud de arco) nos sirve también para obtener las ramas principales de órbitas periódicas que surgen de cada una de las degeneraciones principales que se dan sobre el lazo, trabajo que abordamos en el capítulo quinto. Esto permite observar que alguna de dichas ramas tiende, a medida que aumenta el periodo, a ciertas conexiones globales (alguna de ellas estudiada en el capítulo tercero). Veremos también que, de modo genérico, todas estas familias pasan por tangencias de distinto tipo entre las órbitas periódicas y el plano de separación. Por ello, van ganando y perdiendo puntos de corte con dicho plano, así que necesitamos desarrollar y manipular condiciones para órbitas periódicas reversibles y no reversibles de dos, cuatro, seis y ocho cortes.

Para terminar la memoria añadimos unas líneas a modo de resumen, donde escribimos algunas conclusiones de nuestro análisis y, además, planteamos algunos trabajos que se han abierto durante la investigación y que sería interesante considerar en el futuro.