



Título: CONTRIBUTION TO THE CENTER AND INTEGRABILITY PROBLEMS IN PLANAR VECTOR FIELDS

Nombre: SANTALLUSIA ESVERT, XAVIER MIQUEL

Universidad: Universidad de Lleida

Departamento: Matematica

Fecha de lectura: 29/03/2017

Programa de doctorado: Programa de Doctorado en Ingeniería y Tecnologías de la Información por la Universidad de Lleida

Dirección:

> **Director:** JAUME GINE MESA

> **Director:** M.TERESA GRAU MONTAÑA

Tribunal:

> **presidente:** JAUME LLIBRE SALO

> **secretario:** SUSANA MAZA SABIDO

> **vocal:** Antonio Algaba Durán

Descriptor:

> ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

El fichero de tesis ya ha sido incorporado al sistema

> <http://hdl.handle.net/10803/402941>

Resumen: Resum:

Aquesta tesi consta d'un primer capítol introductor, set capítols amb diferents resultats i una bibliografia.

El primer capítol conté la definició i els resultats previs necessaris per abordar la resta de la memòria. El capítol 2 i 3 estan molt relacionats. En el primer es descriu un mètode alternatiu per al càlcul de les constants de Poincaré--Liapunov. A diferència de mètodes anteriors, el mètode presentat no requereix el càlcul d'integrals i d'ona de forma explícita les constants de Poincaré--Liapunov. En el tercer capítol es descriu com s'ha implementat aquest nou mètode i els resultats que d'ona per a sistemes quadràtics i sistemes amb termes no lineals cúbics homogenis.

El quart capítol es centra en equacions d'Abel i la seva integrabilitat. Es descriu la forma d'una integral primera que sigui algebraica en funció de les variables dependents i es donen múltiples exemples d'equacions d'Abel integrables en aquest sentit. En el cinquè capítol també s'aborda el problema de la integrabilitat però per a equacions diferencials en el pla definides per funcions analítiques. Es fa un reescalat de les variables dependents i de la variable independent amb un paràmetre "epsilon" que està elevat a potències senceres (blow-up paramètric) de forma que el sistema resultant sigui analític en "epsilon". Es d'ona un mètode que



aprofita que una integral primera, si existeix, ha de ser analítica en el paràmetre a fi de trobar condicions per a l'existència d'aquesta integral primera. D'aquesta manera es defineix el que s'anomenen variables essencials del sistema.

Els darrers tres capítols versen sobre les equacions d'Abel i el problema del centre. En general es consideren equacions d'Abel trigonomètriques. En el sisè capítol es donen algunes condicions necessàries i suficients per a que una equació d'Abel trigonomètrica definida per polinomis trigonomètrics de grau fins a 3 tingui un centre. Tots els exemples donats en aquest capítol tenen un centre universal. En el capítol setè es d'ona un exemple d'una equació d'Abel trigonomètrica definida per polinomis trigonomètrics de grau 3 que té un centre que no és universal. D'aquesta manera es resol un problema obert: determinar el grau més petit pel qual un equació d'Abel trigonomètrica amb centre no és de composició. El darrer capítol tracta equacions d'Abel trigonomètriques i polinomials i d'ona un compendi dels darrers resultats coneguts i conjectures sobre el problema del centre en aquestes equacions. També es donen exemples nous d'equacions d'Abel amb centre.

Resumen:

Esta tesis consta de un primer capítulo introductorio, siete capítulos con diferentes resultados y una bibliografía. El primer capítulo contiene la definición y los resultados previos necesarios para abordar el resto de la memoria. Los capítulos 2 y 3 están muy relacionados. En el primero se describe un método alternativo para el cómputo de las constantes de Poincaré--Liapunov. A diferencia de métodos anteriores, el método presentado no requiere el cálculo de integrales y da de forma explícita las constantes de Poincaré--Liapunov. En el tercer capítulo se describe cómo se ha implementado este nuevo método y los resultados que da para sistemas cuadráticos y sistemas con términos no lineales cúbicos homogéneos.

El cuarto capítulo se centra en ecuaciones de Abel y su integrabilidad. Se describe la forma de una integral primera que sea algebraica en función de las variables dependientes y se dan múltiples ejemplos de ecuaciones de Abel integrables en este sentido. En el quinto capítulo también se aborda el problema de la integrabilidad pero para ecuaciones diferenciales en el plano definidas por funciones analíticas. Se hace un reescalado de las variables dependientes y de la variable independiente con un parámetro "epsilon" que está elevado a potencias enteras (blow-up paramétrico) de forma que el sistema resultante sea analítico en "epsilon". Se da un método que aprovecha que una integral primera, si existe, debe ser analítica en el parámetro con el fin de encontrar condiciones para la existencia de esta integral primera. De esta manera se define lo que se llaman variables esenciales del sistema.

Los últimos tres capítulos versan sobre las ecuaciones de Abel y el problema del centro. En general se consideran ecuaciones de Abel trigonométricas. En el sexto capítulo se dan algunas condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación de Abel definida por polinomios trigonométricos de grado hasta 3 tenga un centro. Todos los ejemplos dados en este capítulo tienen un centro universal. En la capítulo séptimo se da un ejemplo de una ecuación de Abel definida por polinomios trigonométricos de grado 3 que tiene un centro que no es universal. De esta manera se resuelve un problema abierto: determinar el grado mas pequeño por el que una ecuación de Abel trigonométrica con centro no es de composición. El último capítulo trata ecuaciones de Abel trigonométricas y polinomiales y da un compendio de los últimos resultados conocidos y conjeturas sobre el problema del centro en estas ecuaciones. También se dan ejemplos nuevos de ecuaciones de Abel con centro.

Summary:



This thesis consists of a first introductory chapter, seven chapters with different results and a bibliography. The first chapter contains the definition and the previous results necessary to address the rest of the memory. Chapters 2 and 3 are closely related.

In the first one, an alternative method is described for the computation of the Poincaré--Liapunov constants. Unlike previous methods, the presented method does not require the computation of primitives and gives an explicit expression of the Poincaré--Liapunov constants. The third chapter describes how this new method has been implemented and the results that it gives for quadratic systems and systems with homogeneous, cubic, non-linear terms.

The fourth chapter focuses on Abel equations and their integrability. We describe the form of a first integral that is algebraic in function of the dependent variables and give more examples of equations of Abel integrable from this point of view. The fifth chapter also discusses the integrability problem but for differential equations in the plane defined by analytical functions. A rescaling of the dependent and the independent variables with a parameter "epsilon" which is elevated to integer powers (parametrical blow up) so that the resulting system is analytical in "epsilon". A method is given that takes advantage that a first integral, if it exists, it must be analytical in the parameter in order to find conditions for the existence of this first integral. In this way we define what are called essential variables of the system. The last three chapters deal with Abel equations and the center problem. In general, we consider Abel trigonometric equations. In the sixth chapter some necessary and sufficient conditions for an Abel equation defined by trigonometric polynomials of degree up to 3 have a center are given. All the examples given in this chapter have a universal center. In the seventh chapter it is given an example of an Abel equation defined by trigonometric polynomials of degree 3 with a center which is not universal. In this way an open problem is solved: to determine the lowest degree such that a trigonometric Abel equation has a center which is not a composition center. The last chapter deals with trigonometric and polynomial Abel equations and gives a survey of the last known results and conjectures about the center problem for these equations. Besides some new examples of Abel differential equations with a center are given.